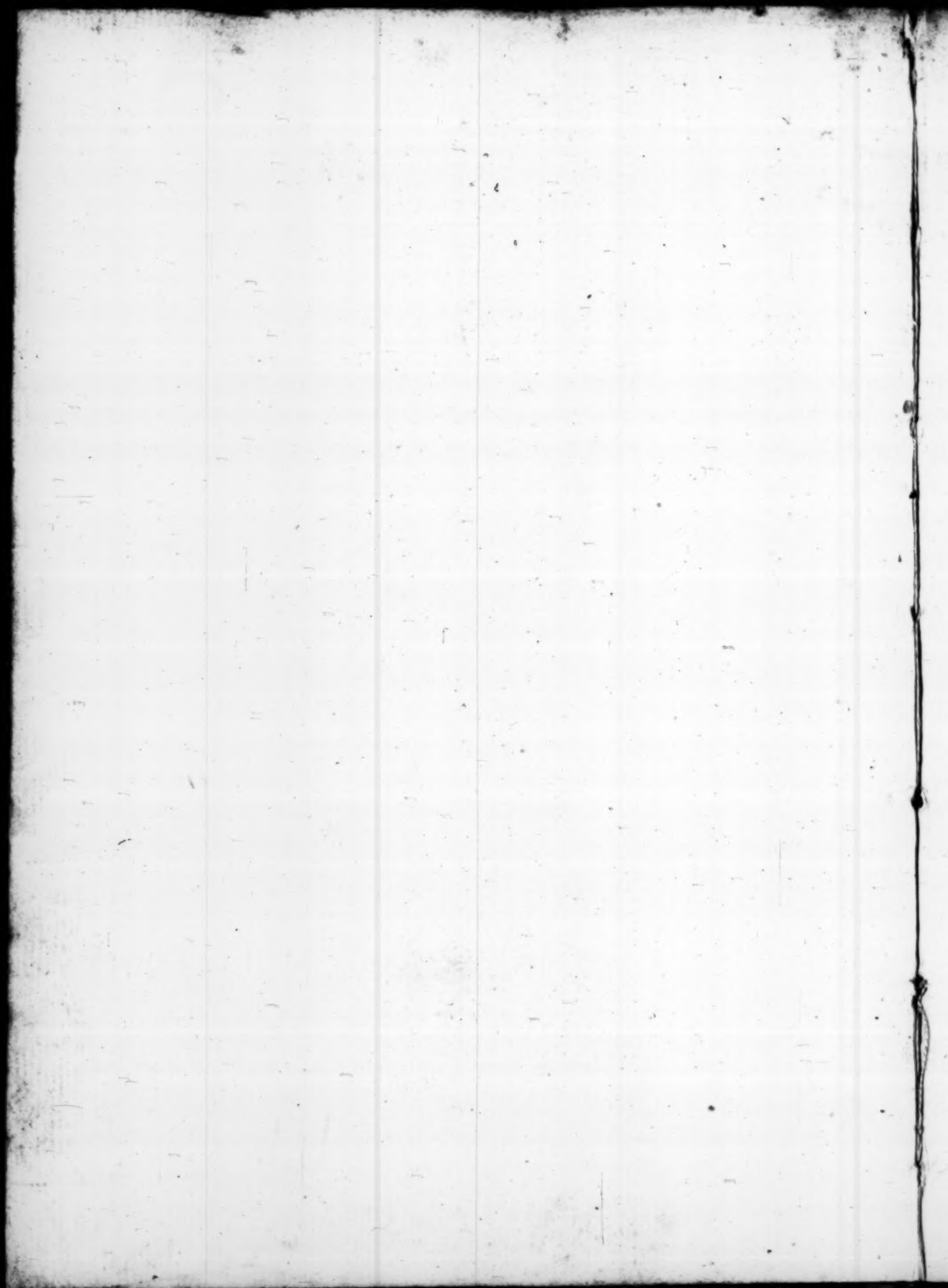
SUPPLEMENTUM
ANALYTICUM
AD
ÆQUATIONES
CARTESIANAS.

Per *N. Hanbury* Trin. Coll. *Cantab.* Soc.



CANTABRIGIÆ,
Ex Officina *Johann. Hayes*, Celeberrimæ *Academiæ*
Typographi. Impensis Authoris. MDCXCI.
Prostant venales per *Edvardum Hall*, Bibliopolam *Cantab*.



~~[illegible]~~ May 12. 1759

Wm Hanbury gave this book to the British Museum being informed it was not amongst the books there before reposited.



Septemb. 29. 1691.

Imprimatur,

Carolus Roderick, Procan.

Jo. Mountagu, Coll. Trin. *Magist.*

Humf. Gower, Professor *Marg.*

Gabr. Quadring, Coll. Magd. *Magist.*



Reverendo Doctissimoque Viro

D. D. BUSBY

Ecclesiæ *Westmonasteriensis*

PRÆBENDARIO,

Scholæque ibidem *Archididascalo*, S.P.



Ihil usitatius est, Reverende Vir, apud plerosque, quam si quid novi adinvenerint, vel inventum auxerint (utile ceu jucundum fuerit) id publici juris facere. Et ejusmodi causa est, propter quam nunc opusculum hoc in apricum profero; idque Tuo sub Patrocinio, quò nostri conatus omnes tanquam ad Asylum confugiunt; Quos Te benignius excepturum confido, postquam suscepti veram & genuinam rationem reddiderim. Sæpe quidem cum in hoc studio Mathematices desudaverim, in disquirendis Analogiis, incidi in varias æquationes: & sicubi Reductiones æquationum omnes (in quibus fœliciter operam navârunt multi, & cum primis Cartesius) fiunt in ordine ad earum Analysin; diligenti facta disquisitione statui certam quandam atque facilem methodum eas resolvendi proponere. Atque hanc viam ingressus sum, quæ maxime naturalis, & ad institutum appositissima videtur; scilicet definiendo præcipuos quosdam limites cujusvis potestatis per numeros vulgares, ita Natu-

ram explicare earum Devolutionum quæ Praxin implicant, ut postea non sit magni moliminis dijudicare de eruendo singulari Latere primò & feliciter in opere pergendo. Quoad methodum quâ in sequentibus usus sum; primò modum ostendam Reducendi æquationes Cartesianas ad unam eandemque formam, & deinceps earum Analysin: tum demum limites supradictos proponam quibus hoc adinveni, & quibus probè intellectis nihil occurret difficultatis in aliquâ æquationis Analysi quod non facilè licebit eludere.

Tui observantissimus

N. Hanbury.

Supple-



Supplementum Analyticum AD *Æquationes* CARTESIANAS.

CAPUT I.

De Quantitate.

Quantitas est vel continua { Linea / Superficies / Corpus } quibus addi poterint Motus Tempus & Locus vel discreta, Numerus.

Quantitas continua est explicabilis per discretam sive Numeros; commensuranda per dinumerationem linearum linea, Quadratorum planum, Cuborum solidum: ut linea octopedalis sunt octo lineæ unius pedis; item solidum totidem Cubi.

Cum Quantitas omnis quatenus est divisibilis, sit etiam numerabilis; quatenus vero non divisibilis in partes minimas æquales non perfecte numerabilis; necesse est ut inter quodlibet Quadratum ab unitate prorsùm, unumquemque Cubum, aliasque porrò potestates intercidant certa quædam spatia sive differentiæ. Hinc ineffabilis divisio & inexhausta Penus minutissimæ Quantitatis (quæ nunquam habet minimum coefficiens) exhibet Proportiones & Analogias in potestatibus ad latera pertinentes, in lateribus

non inveniendas. Quid ſit Latus ſive Radix, quid Superficies quadrata, quid Cubus, differentia Quadratorum, differentia Cuborum, manifeſtò comparebit ex ſubjectâ Tabulâ: ubi quartanam, quintanam, ſextanam reliquaſque poteſtates omiſi; utpote ex Quadratis, aut Cubis, vel utriſque conflatas, eorum naturam quadamtenus induentes.

Numeri	Longitudo linearum ſive laterum.	Quadrata.	Differentiæ Quadratorum.	Cubi.	Differentia Cuborum.	Differentiæ differentiarum.
	1	1	3	1	7	12
	2	4	5	8	19	18
	3	9	7	27	37	24
	4	16	9	64	61	30
	5	25	11	125	91	36
	6	36	13	216	127	42
	7	49	15	343	169	48
	8	64	17	512	217	5[illegible]
	9	81	19	729	271	60
	10	100	21	1000	331	66
	11	121	23	1331	397	72
	12	144	25	1728	469	78
	13	169	27	2197	547	84
	14	196	29	2744	631	90
	15	225	31	3375	721	96
	16	256	33	4096	817	102
	17	289	35	4913	919	108
	18	324	37	5832	1027	114
	19	361	39	6859	1141	120
	20	400	41	8000	1261	
	21	441	43	9261		
	22	484				

In

In præfixâ tabulâ Numerus omnis ordine est Radix sui Quadrati, adeoque ubicunque datur quadratum in integris; Quadratum proximum consit ex radice prioris Quadrati cum unitate superadditâ, sumptis simul tanquam unâ lineâ, exempli gratiâ; 4 esto Quadratum propositum: Proximum quadratum procreatur ex radice ejusdem scilicet Binario cum unitate superadditâ, id est, Ternario, nempe radix Quadrati quæsiti erit ternarius: qui divisus in A binarium, & unitatem fit A + 1, cujus Quadratum est $A^2 + 1 + 2 A$, inde detrahatur Quadratum primo propositum scilicet A^2; restat inter hoc & proximum Quadratum differentia $1 + 2 A$ id est Unitas cum duplo radicis Quadrati prioris; & exinde sequitur numeros omnes impares ordine esse differentias Quadratorum; quia numerus omnis duplatus exhibet numerum parem, unitate superadditâ imparem ex αὐτοψίᾳ patet: Obitèr notandum est, per singulas decadas, quadrata terminari in unam ex hisce figuris 1. 4. 5. 6. 9. 0.

Extractio Radicis surdæ quam proximè, id est, Numeri qui non est figuratus sui Characteris.

Ex hypothesi 147 esse Quadratum Fractio 3 sunt totidem differentiæ inter Quadratum 144 & Quadratum proximè sequens 169 nimirum 25 id est, duplum radicis 12 superadditâ unitate continuari potest Tabula quadratorum hoc modo: Ultima quævis differentia + 2 est differentia ad proximum Quadratum.

$$\begin{array}{r} (3 \\ 147 \;(12 \\ \underline{12} \\ 4 \\ 4 \end{array}$$

Explicatio Tabellæ Cubicæ.

In præfixâ Tabulâ, 8 esto Cubus propositus, Cubus proximus generatur ex Radice ejusdem; scil. Binario cum Unitate superadditâ, id est Ternario; qui divisus in A binarium, & Unitatem fit A + 1 cujus Cubus est $A^3 + 1 + 3 A + 3 A^2$ unde detrahatur Cubus primo propositus A^3 restat

inter hunc & proximum Cubum differentia $1 + 3A + 3A^2$. Esto $G = A + 1$ erit itidem inter G^3 & Cubum proximum differentia $1 + 3G + 3G^2$ unde si detrahantur $1 + 3A + 3A^2$ restabunt 3 cum tribus differentiis Quadratorum. Hinc sequitur differentias Quadratorum, id est, numeros omnes ordine impares in triplum ductos, superaddito ternario esse differentias differentiarum, & proinde ordinari progressione, sive proportione Arithmeticâ continuâ cujus communis differentia est 6, ut ex αὐτοψίᾳ patet. Continuari potest tabula Cuborum pro libitu. Ultima quævis differentia differentiarum + 6 addita differentiæ Cuborum postremæ exhibet differentiam ad proximum Cubum.

Cuborum Analysis ex eorum Genesi condiscitur.

Hactenus de differentia potestatum ordine progressiva; est insuper & alia quædam insignis & præclari usus differentia nempe inter quamlibet Radicem suasque potestates. Exempli gratiâ. 2 quadrando lucratur 2. Cubando 6. Item 3. quadrando lucratur 6. Cubando 24 & porrò in cæteris; ubi obiter, ex antedictis liquet differentias omnes inter Radices & sua Quadrata commensurabiles esse numero binario, inter Radices singulas suosque Cubos commensurabiles esse numero senario. Ars omnis in eo consistit; nimirum datâ hujusmodi differentiâ, Potestatem ipsam numeris explicitam adinvenire: quod fit per resolutionem Æquationis. *v. g.* si dicatur $A^3 - 60 = A$.

Quæritur A nempe 64 cujus radix Cubica est 4.

Sed priusquam de Æquationibus penitius agimus, nonnihil de numeris surdis (quorum in sequentibus usus est insignis) dicendum est: Verum etsi non sit hujus instituti vulgarem Arithmeticam & communes Fractos docere, tamen ista qui probè calluerit, in his nihil difficultatis inveniet.

CAPUT

CAPUT II.

De Numeris Surdis.

NUmeri Surdi deducunt originem à Multiplicatione potestatum; quippe quia quilibet numerus cujuslibet characteris, ceu Quadraticus, ceu Cubicus, poni potuerit pro qualibet quantitate cujuslibet Potestatis.

Esto proposita Quantitas A. ejusdem Potestates erunt A^2 A^3 A^4 A^5 A^6 A^7 A^8 A^9 &c.

Regula multiplicandarum potestatum hæc est: Adde Indices dabunt Indicem potestatis quæsitæ id est, A^2 in A^3 = A^5. A^3 in A^5 = A^8 &c. Jam fiat A^2 = 10 erit A = *Rq*. 10. vel fiat A^3 = 10. erit A = *Rc*. 10.

Ex antedictis liquet Praxin surdorum fieri per multiplicationem sive commensurabilitatem. Quando itaque Radices surdæ dissimilium Potestatum occurrunt multiplicandæ. Potestates per quas & in quibus latera multiplicantur ante Praxin fieri debent similes, id est convenire in potestate ex utrisque conflata; ut *R q*. 3. *R c*. 4. fiunt per potestatem sextanam reductæ, Radix sextanæ 27. & Radix sextanæ 16. Namque erant numeri hinc & inde exigente charactere, quadratus Cubandus, Cubus quadrandus. Verum ubi potestates fuerint aliquatenus similes, per Reductionem minus operosam minor ad majorem poterit accommodari ut *Rq*. 3. & *Rqq*. 5. fiunt *Rqq*. 9. & *Rqq* 5.

Additio & Substractio Surdorum fit ad hunc modum per Multiplicationem: Detur numerus 2. addendus numero 8. vel ab eodem detrahendus. Inquiro quoties contineatur 2 in 8 inquit Quotus quater: quamobrem 2 in 5 = 8 + 2 vel 2 in 3 = 8 — 2.

Simili modo 2 in 5 continetur $\frac{5}{2}$ huic addo vel detraho unitatem & $\frac{7}{2}$ in 2 = 5 + 2 vel $\frac{3}{2}$ in 2 = 5 — 2 exempla. *Rq*. 12) *Rq*. 147 (*Rq*. 12 $\frac{3}{12}$ id est *Rq*. 12 $\frac{1}{4}$ id est 3 $\frac{1}{2}$ itaque adduntur per 4 $\frac{1}{2}$ subtrahuntur per 2 $\frac{1}{2}$. *Rc*. 40.) *Rc*. 1715 (*Rc*. 42 $\frac{35}{40}$ id est *Rc*. 42 $\frac{7}{8}$ id est *Rc*. $\frac{343}{8}$ id est $\frac{7}{2}$

Rc. 40 in $\frac{9}{2}$ = *Rc*. 3645 —— Summa.

Rc. 40 in $\frac{5}{2}$ = *Rc*. 625 —— Differentia:

Hujus-

Hujuſmodi Radices Surdæ dicuntur commenſurabiles; incommenſurabiles adduntur vel ſubtrahuntur per ſigna (+) (—) ſi ex pluribus Surdis in poteſtatem coalitis requiratur radix; vocabitur Univerſalis; & hunc ad modum ſcribitur. Eſto *Rq.* 5. + *Rc.* 3 quadratum, ejuſdem radix erit *Rq.* [*Rq.* 5. + *Rc.* 3.] Minutiæ nihil habent in ſe novi, ſed tractantur hîc ut vulgares Fracti, obſervatis tantùm quæ dicuntur hactenus de Integris.

Quoad Multiplicationem & proinde Diviſionem, ſatis ſuprà dictum eſt.

Siqua fuerint Artis adminicula adhibenda, Praxis in ſequentibus abunde ſatis illuſtrabitur.

CAPUT III.

De Æquationibus earumque Reſolutione.

ÆQuatio eſt poſitio compluriun Quantitatum vel unius partium in æquilibrio: quodcunque igitur in hac vel illâ lance, augetur Additione, detrahitur Subſtractione, repetitur Multiplicatione, vel denique Diviſione imminuitur; idem fiat & in alterâ lance. Quod enim attinet ad Hypobibaſmum, & Tranſpoſitionem membrorum ſub contrariis ſignis: Hypobibaſmus eſt æqualis depreſſio vel diviſio poteſtatum per Radicem, & Tranſpoſitio ſub contrariis ſignis, nihil aliud eſt quam Additio vel Subſtractio, ut $5 + 2 = 10 - 3$. Tranſponatur 3 ſub contrario ſigno; id eſt, addatur 3 in utrâque lance, & emergunt $5 + 2 + 3 = 10$. Sed ſatis eſt hæc hactenus præfari, jam ad rem ipſam accedamus; ad quam quaſi ad ſcopum, omnia quæ tradita ſunt collineantur. *Carteſius* Æquationes omnes biquadraticas ad Cubicas, dein Cubicas ad aliquam ex his formis reducere docuit

$$Z^3 = -pZ + q.$$
$$Z^3 = +pZ + q.$$
$$Z^3 = +pZ - q.$$

Quæ

Quæ scribendo y R p pro Z evadunt

$$y^3 = -y + R\,\frac{qq}{p^3}$$
$$y^3 = +y + R\,\frac{qq}{p^3}$$
$$y^3 = +y - R\,\frac{qq}{p^3}$$

Ubi R $\frac{qq}{p^3}$ in casu primo est summa Cubi y^3 & ejus Radicis y; in secundo verò ac tertio est eorundem differentia, & hæc differentia per methodum *Huddenii* fit minima in secundo & maxima in tertio; ubi est

$$3y^3 = y. \text{ seu } y = R\,\frac{1}{3}$$

Hæ verò formæ delendo quantitatem Surdam evadunt

$$y^6 + 2y^4 + yy = \frac{qq}{p^3}$$
$$y^5 - 2y^4 + yy = \frac{qq}{p^3}$$
$$y^6 - 2y^4 + yy = \frac{qq}{p^3}$$

Et scribendo in casu primo $x - \frac{1}{3}$ pro yy, in secundo verò ac tertio $\frac{1}{3} - x$ pro yy fiunt æquationes tres unius & ejusdem formæ.

$$x^3 + xx = \frac{4}{27} + \frac{qq}{p^3}$$
$$x^3 + xx = \frac{4}{27} - \frac{qq}{p^3}$$
$$x^3 + xx = \frac{4}{27} - \frac{qq}{p^3}$$

Hic in primâ æquatione x est major quam $\frac{1}{3}$ & minor quam R Cub $\frac{1}{27} + \frac{qq}{p^3}$. In secundâ verò ac tertiâ x est minor quam $\frac{1}{3}$ & major quam R Cub. $\frac{1}{27} - \frac{qq}{p^3}$. Et inde Latus singulare primum Radicis ex his æquationibus extrahendæ facile emittitur quo invento cætera prodeunt per methodum sequentem.

Postquam vero radix x per methodum illam extracta est; ponendo $x - \frac{1}{3} = yy$ in casu primo vel $\frac{1}{3} - x = yy$ in secundo ac tertio habebitur yy. Deinde ponendo $yyp = ZZ$ habebitur ZZ, cujus latus quadratum est una è tribus radicibus æquationis sub initio propositæ. Denique si hæc æquatio dividatur per Z — radice inventâ prodibit æquatio quadratica, cujus radices (ut notum est.) sunt reliquæ duæ radices æquationis dividuæ.

Res exemplis patebit.

Proponatur æquatio ut putà in trium formatum ultimâ, ubi p esto $\frac{3}{4}$, & q $\frac{1}{8}$ ergo $R\,\frac{qq}{p^3}$ erit $R\,\frac{1}{27}$. Ergo $\frac{4}{27} - \frac{qq}{p^3} = \frac{1}{9}$ quæ

$= \frac{1}{9}$ quæ convertatur in Fractionem decimalem, & fiet

$$x^3 + xx = \frac{0111.111.111.111.111.111.111.111}{1000.000.000.000.000.000.000.000} \ \&c.$$

Obiter notandum est quòd si hic numerus resolvendus major esset quàm $\frac{4}{27}$. Vel si R $\frac{11}{93}$ major fuisset quàm R $\frac{4}{27}$ tum radix istius æquationis numeris explicari posset per Cardani regulas; sin minus è contrà.

Jam Extractio radicis x haud multò difficilius expeditur quam communi divisione; quia liberati sumus omnibus coefficientibus, quibus laborat Praxis Vietæ in Suis Analyticis. Ac proinde sufficiet nobis parcus Divisor, scilicet compositus ex duplo lateris primi pro Extractione Quadraticâ, & triplo quadrato lateris primi pro extractione cubicâ. Numeri posthàc ablatitii erunt quatuor. Primus; Divisor compositus multiplicatus in latus secundum. Secundus est quadratum lateris secundi, sub suo puncto quadratico. Tertius est triplum quadratum lateris secundi ductus in latus primum, cujus locus erit proximè à puncto cubico. Quartus denique est Cubus lateris secundi sub suo puncto cubico.

Cæterùm animadvertendum hìc in Fractis decimalibus summam potestatem non esse præcipuam, Cubus enim minor est Quadrato; aliter quam fit in Integrorum Analysi apud Vietam; sicut ipse ait in fine paginæ 173. *Ut in puris sic etiam in adfectis Potestatibus exigimus numeros proponi integros & symmetros, non etiam Fractos & Asymmetros.* Inquirendum est igitur primo de latere quadratico: Atque etiam ut ordo Potestatum hìc invertitur, sic & ordo Punctationis incipiet à sinistrâ, contra quam fit in integris numeris. Placuit eâ tenus mentionem facere nequa suboriatur in opere difficultas.

Ratio eruendi singularis Lateris primi.

Si numerus resolvendus major sit quàm $\frac{0011}{1000}$ tum radix quæsita exuperat $\frac{21}{10}$ cadit enim inter $\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{9}$.

In hoc casu singulare latus primum necessario debet esse 1. 2. vel 3. & non ita magno molimine dignoscitur. Si vero cadat infra Fractionem hanc $\frac{1}{10}$ Cubus vix adficiet qua-

quadratum ſingularis lateris primi, ſed defluit & devolvitur in conſequentia ut mox videbitur: ideoque in hoc caſu eruitur tanquam in quadrato puro, facilius ſi fieri poſſit quam in altero caſu. Punctatio incipit ab iſtâ Cyphrâ quæ directè impendet denominatoris unitati.

Et ad vitandam punctorum quadraticorum cum Cubicis confuſionem, lineas deducendas malui, quæ commodius inſerviant loco punctorum cubicorum. Jam vero duos caſus prædictos duobus diverſis exemplis expediam. Aſſumo mihi primam partem reſolvendæ quantitatis quæ ita punctatur c111| & ex collatione hujuſce Fractionis cum quadrato & cubo (quæ pertinent ad $\frac{1}{10}$) ſimul ſumptis, videlicet $\frac{0011}{1000}$ video quod radix quæſita cadit inter $\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{3}$. Ergo latus ſingulare primum eſt 1. 2. vel 3. at non eſt unitas ex ipsâ punctatione neque poteſt eſſe ternarius ex comparatione, quia juſto major eſt. Nam ſi quadretur ternarius fieret $\frac{009}{100}$ & ſi cubetur $\frac{0027}{1000}$ quæ ambo in unâ ſummâ conſlant 0117| quod juſto majus eſt. Reſtat igitur 2 pro latere ſingulari primo.

Quantitas reſolvenda	^{63}0111|111|111|111|111|111|111|111| (0293127		
Quadratum primum	4		
Ejuſdem Cubus	8		
Solida ſimul auferenda	48		
	2622	108354	23981620
Reſiduum reſolvendi	63111	2622111	108354111
Duplum lateris primi	4	58	586
Tripl.quadr.lateris primi	12	2523	257547
Diviſor	52	8323	843547
Latus 2^{m} in diviſorem	468	24969	843547
Quadratum lateris 2^{di}	81	9	1
Tr.quadr.lat.2^{i} in lat.1^{m}.	486	783	879
Cubus lateris ſecundi	729	27	1
Summa ablatitiorum.	60489	2513757	84372491

vel	7102411783	
Residuum resolvendi	23981620111	7102411783111
	5862	58624
	25772283	360811963 2
	84392283	9470519632
	168784566	
	4	
	35772	
	8	
	16879208328	

Quamobrem nunc juxta præcepta superius tradita dicendum est

$\frac{1}{3} = 0333333$

$x = 0293127$

Ergo $yy = 0040206$

Unde $yyp = 0030154 = ZZ$

Hujus radix quadrata nullo labore extrahitur addendo in fine circulos vulgari methodo, & proveniet $017364 = Z$ Nempe sinus rectus graduum decem. Tantundem fiet si extrahatur radix quadrata ex yy, ejus subduplum est $= Z$. Hæc enim æquatio orta est ex trisectione anguli sexaginta graduum posito radio circuli R $\frac{1}{3}$, extrahe radicem ex yy quam invenies 20051. Dic ergo R $\frac{1}{3}$: 20051 : : 10000000 : 34729 nempe chorda viginti graduum. Jam denuo si æquatio ab initio proposita scilicet $Z^3 = \frac{3}{4} Z - \frac{1}{8}$ dividatur per Z — radice inventa, prodibit æquatio quadratica hujusmodi $Z^2 = 0719846 - 017364 Z$ quod fit sine ulla pene operatione tollendo ZZ ex P quod in hoc loco est $\frac{3}{4}$ restabunt numerales figuræ 0719846. Et ponendo Z quod in hoc loco erit 017364 pro coefficiente, prodibit tandem Radix altera $076598 = Z$

Exhibeamus exemplum in quo casus secundus occurrit, & esto hunc in modum.

$Z^3 = 4Z - 3$ ubi P est 4 &

q 3, ergo R $\frac{qq}{p^3}$ erit $\frac{9}{64}$ Ergo

$\frac{4}{27} - \frac{qq}{p^3} = 0007523 \mid 148 \mid \&c = x^3 + xx$

numerus resolvendus.

Hæc

Hæc cadit infra $\frac{1}{10}$ ubi in processu à sinistrâ dextram versus prima figura scilicet 7. comparet in puncto cubico, verum Cubus non eò pertinuit, tantum ad numerum quinarium sese portendens.

Ad eruendum igitur latus singulare primum inquiro propemodum ut in Quadratis puris, quodnam sit maximum Quadratum quod depromi poterit ex numeris 75 & invenio 64 cujus Cubus 512 quia non pertinuit ad punctum cubicum 7. proinde devolvitur ad Punctum cubicum 3 ut patet in subjecto Schemate. Sic primo intuitu, ut ita dicam, prosilit in medium latus singulare primum, *viz.* Numerus Octonarius.

Numerus resolvendus.

611
0007523 | 148 | 148 | 14 | 8 (08333 &c.
64
512
6912

Residuum resolvendi	62361	6248611
	611148	62361148
	16	166
	192	20667
	1792	186667
	5376	560001
	9	9
	216	2241
	27	27
	548787	56112537

62486111148
1666
2081667
18741667

Et sic provenient in infinitum, est enim 8333333 Fractio Decimalis designans unam duodecimam.

Est itaque $X^3 = \frac{1}{12}$ &

$\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} = y^2$ cujus Radix est $\frac{1}{2}$

y^2 P $=$ Z $=$ 1.

CAPUT

CAPUT IV.

De definiendis Limitibus Æquationum præcipuis per numeros vulgares.

ÆQuationes cubicæ quarum Radices ſubſidunt infra unitatem nullo modo *Cardani* regulis ſunt explicabiles.

Æquationes quarum radices exuperant unitatem ſunt duorum generum, nempe vel ſunt ejuſmodi, quarum radices cadunt inter Unitatem & R $\frac{4}{3}$ ideoque *Cardani* regulis non magis obtemperant atque iſtæ aliæ quæ ſubſiderunt infra Unitatem.

Vel ſunt ejuſmodi quarum radices ſunt majores quam R $\frac{4}{3}$ & per *Cardani* regulas numeris explicabiles.

Propoſitam Æquationem itaque liberam fac ab omnibus coefficientibus, & tum ſi Cubus major ſit ſuâ radice, & præponderet; Radix ipſius exuperat Unitatem; deinceps conſulatur differentia quæ extat inter Cubum & ſui radicem: Si enim iſta differentia minor fuerit quam R $\frac{4}{27}$ Radix illa cadit inter Unitatem & R $\frac{4}{3}$ & reſolvitur generali hoc Theoremate.

Quivis numerus ſi quadretur & cubetur & quadratum cum cubo ſumatur tanquam una Summa; deinde idem ille numerus augeatur unitate, & poſtquam ita auctus fuerit extrahatur ejuſdem Radix quadrata; dico quod illa prior ſumma eſt quadratum differentiæ quæ extat inter iſtam radicem quadratam & iſtius radicis quadratæ cubum, quod ſic probatur. Detur numerus quilibetcunque

$$Z - 1 \text{ Ipſius quadratum } Z^2 - 2Z + 1$$
$$\text{Cubus } Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 1$$
$$\text{Summa } Z^3 - 2Z^2 + Z$$

$Z - 1$ Unitate auctus eſt $= Z$ cujus Radix quadrata eſt R Z.

Et ſi R Z^3 — R Z quadretur, fiet æqualis ſummæ prædictæ, quod erat demonſtrandum.

Ubi

Ubi igitur occurrit æquatio inter Unitatem & $R\frac{4}{3}$ quadretur Æquationis differentia & eadem priori praxi invenies $Z - 1 = x$ addatur Unitas & extrahe radicem quadratam. Exempli gratiâ proponatur Æquatio;

$$y^3 = y + \frac{1}{3}$$

Si quadretur $\frac{1}{3}$ fiet $\frac{1}{9}$ nempe 0111 | 111 | 111 | &c. Cujus radix est 0293127 priori praxi adinventa; addatur Unitas & fiet 1293127 cujus radix quadrata est $113715 = y$ numerus postulatus.

Quoniam hujus est instituti in Potestatibus indefinitè ascendere non abs re fore duxi si præponerem primò methodum generalem facilemque tollendi quemlibet coefficientem, quod fit.

Supponendo numerum incertum, ejusdem potestatis cum eâ quantitate cui affigitur coefficiens, æqualem esse eidem numero summæ potestatis in coefficientem ducto, denique tota Æquatio multiplicetur per summam Potestatem numeri inventi. Proponatur Æquatio Potestatis decumanæ

$$Z^{10} = 2\,Z^4 - \frac{127}{1024}$$

Esto numerus incertus N

Erit ex hypothesi $N^4 = 2\,N^{10}$

Ergo $1 = 2\,N^6$

Erit numerus inventus R cubocub. $\frac{1}{2}$ & in summa potestate R Cubocub. $\frac{1}{1024}$ id est R cub. $\frac{1}{32}$ per quam multiplicetur tota Æquatio, & prodibit

R Cub. $\frac{1}{32}$ Z^{10} = R Cub. $\frac{1}{4}$ Z^4 — R Cub. $\frac{2048383}{943157383258}$

Quæ est Æquatio simplicissima scribendo pro R Cub.

$\frac{1}{32}$ Z^{10}. $y^{10} = y^4$ — R Cub. $\frac{2048383}{943157383\,8}$

His præmissis agamus de limitibus & primo quidem Quadraticarum.

Etsi ab initio nihil super his comminisci statueram, tamen propter eorum affinitatem cum Biquadraticis aliquid prælibasse haud pœnitebit.

In sequentibus per D intelligo Differentiam inter Radicem & ejusdem Quadratum.

Per Complementum intelligo semper complementum ad Unitatem.

Ex Radicibus infra Unitatem dico quod $\frac{1}{2}$ dempto suo

Quadrato

Quadrato maximam præbet differentiam nempe $\frac{1}{4}$ quod sic probatur.

Primo ponatur $\frac{1}{2} + x$

ejusdem quadratum $\frac{1}{4} + x + xx$

Differentia $\frac{1}{4} \quad -xx$

Ponatur iterum $\frac{1}{2} - x$

ejusdem quadratum $\frac{1}{4} - x + xx$

Differentia $\frac{1}{4} \quad -xx$

Utraque Differentia minor est quam $\frac{1}{4}$ quod erat probandum.

Atque insuper utraque Differentia est eadem, & Radices sunt altera alterius Complementum. Itaque omnis Æquatio earum infra Unitatem subsidentium duas habet veras radices alteram alterius Complementum, hanc majorem illam minorem quam $\frac{1}{2}$

Ex antedictis liquet omnes Æquationes quadraticas coefficientibus liberas resolvi in aliquam ex his tribus Radicibus

$\frac{1}{2} + R\ (\frac{1}{4} - D)$

$\frac{1}{2} - R\ (\frac{1}{4} - D)$

Si exuperet unitatem $\frac{1}{2} + R\ (\frac{1}{4} + D)$

CAPUT V.

De Limitibus Cubicarum.

EX Radicibus infra Unitatem dico quod $R\frac{1}{3}$ dempto suo Cubo præbet maximam Differentiam nempe $R\frac{4}{27}$, quod sic probatur. Ponatur

Primo $R\frac{1}{3} + x$

Ejusdem Cubus est $R\frac{1}{27} + x + R\ 3x^2 + x^3$

Differentia $R\frac{4}{27} \quad - R\ 3\ x^2 - x^3$

Ponatur

Ponatur iterum $R\,\frac{1}{3} - x$
Ejusdem Cubus est $R\,\frac{1}{27} - x + R\,3\,x^2 - x^3$

Differentia $R\,\frac{4}{27} - R\,3\,x^2 + x^3$

Utraque Differentia minor est quam $R\,\frac{4}{27}$ quod erat demonstrandum.

Itaque omnis æquatio earum infra unitatem subsidentium duas habet veras radices alteram majorem, alteram minorem quam $R\,\frac{1}{3}$.

De differentiis inter quadrata & eorundem cubos infra unitatem subsidentes.

Dico quod Fractio hæc $\frac{2}{3}$ si prius quadretur, & deinceps ab isto quadrato detrahatur ipsius Cubus, relinquet maximam differentiam nempe $\frac{4}{27}$ quod sic probatur.

Ponatur $\frac{2}{3} - x$
ejusdem quadratum $\frac{4}{9} - \frac{4}{3}x + x^2$
Cubus $\frac{8}{27} - \frac{4}{3}x + 2x^2 - x^3$
Differentia $\frac{4}{27} - x^2 + x^3$

Ubi obiter notandum est, quod si duo numeri conficiunt 2, Differentiæ inter eorum Quadrata & Cubos, conficient simul

Ponatur iterum $\frac{2}{3} + x$
ejusdem quadratum $\frac{4}{9} + \frac{4}{3}x + x^2$
Cubus $\frac{8}{27} + \frac{4}{3}x + 2x^2 + x^3$
Differentia $\frac{4}{27} - x^2 - x^3$

Utraque differentia minor est quam $\frac{4}{27}$ quod erat demonstrandum.

Itaque omnis hujusmodi æquatio earum infra unitatem subsidentium duas habet veras radices, alteram majorem alteram minorem quam $\frac{2}{3}$.

Theorema exinde resultans est quod quadratum differentiæ inter radicem suumque Cubum, æquale est differentiæ inter quadratum complementi ad quadratum radicis, suumque cubum, quod sic probatur.

Esto

Esto differentia inter Rad[m] suumque Cubum	$R\,x - R\,x^3$
ejusdem quadratum est	$x - 2x^2 + x^3$
Complementum ad radicis quadratum	$1 - x$
ejusdem quadratum	$1 - 2x + x^2$
Cubus	$1 - 3x + x^2 - x^3$
Differentia	$x - 2x^2 + x^3$

CAPUT VI.

De limitibus biquadraticarum.

EX radicibus infrà unitatem dico quod R cub. $\frac{1}{4}$ dempto suo biquadrato maximam præbet differentiam nempe R cub. $\frac{27}{256}$.

Quoad Differentiam inter Cubos & eorundem biquadrata dico quod $\frac{3}{4}$ si prius cubetur, & deinceps ab isto Cubo detrahatur ipsius biquadratum relinquet maximam differentiam nempe $\frac{27}{256}$. Utraque assertio probatur simili methodo quâ usi sumus in limitibus cubicis.

Et Theorema exinde resultans est quod Cubus differentiæ inter radicem suumque biquadratum æqualis est differentiæ inter Cubum, Complementi ad cubum radicis, suumque biquadratum. Quin facilis est reductio hujusmodi æquationis ad cubicam methodo Cartesianâ, atqui eo modo velim ut constituatur intrà limites suos, ut ipsissima rei natura clarius innotescat, quapropter depromo Radicem ex ordine quadratico, propter affinitatem inter quadraticas, & biquadraticas æquationes.

Ponatur radix

$$\tfrac{1}{2} + R\,(\tfrac{1}{4} - D)$$

quadratum erit $\frac{1}{2} + R\,(\frac{1}{4} - D) - D$

Cubus erit $\frac{1}{2} + R\,(\frac{1}{4} - D) - D - \frac{1}{2}D - R\,(\frac{1}{4}D^2 - D^3)$

Biquadrat. $\frac{1}{2} + R(\frac{1}{4} - D) - D - \frac{1}{2}D - R(\frac{1}{4}D^2 - D^3) - \frac{1}{2}D - R(\frac{1}{4}D^2 - D^3) + D^2$

Differentia inter Cubum & biquadratum $\frac{1}{2}D - D^2 + R(\frac{1}{4}D^2 - D^3)$

Vel si radix exuperet unitatem erit $\frac{1}{2}D + D^2 + R(\frac{1}{4}D^2 + D^3)$

In

In ſubjecto poteſtatum ſchemate D eſt differentia prima nempe inter radicem & quadratum, cæteras omnes ordine dextram versùs diſpoſui quò magis dilucidè appareant.

Supponatur differentia inter Cubum & biquadratum æqualis numero cuilibetcunque ſcilicet 8.

$$\text{Erit } +8 - \tfrac{1}{2} D - D^2 = R\ (\tfrac{1}{4} D^2 + D^3)$$
$$\text{Ergo } + 64 - 8 D - 16 D^2 + D^4 = 0$$

Reductio ad Cubicam $-64 - 32 y^4 + y^5 = 0$

In quo exemplo, uti & in cæteris omnibus à radice quadraticâ deductis quadratum differentiæ ſemper erit numerus quem Carteſius nominat $|r$. Ejuſdem radix erit q. ejuſdem duplum p.

Modus eruendi hujuſmodi radicem abſque reductione.

Datâ differentiâ inter radicem ſuumque biquadratum, datur etiam differentia inter Cubum, Complementi ad Cubum radicis, ſuumque biquadratum & vice versâ. Habitâ differentia inter Cubum & biquadratum prodeat æquatio quam ſupra propoſuimus.

$$D^4 - 16 D^2 - 8 D + 64 = 0$$

Notandum eſt quod differentia inter cubum & biquadratum ejuſdem eſt generis cum ipsâ radice, id eſt, ſi hæc ſit numerus abſolutus, erit itidem & altera; ſi binomium ſit hæc, binomium eſt & altera.

Æquatio eſt hujuſmodi $D^4 - 16 D^2 - 8 D = -64$

Dividatur in duo quadrata $\left.\begin{matrix} 100 + D^4 - 20 D^2 \\ 4 - 8 D + 4 D^2 \end{matrix}\right\} = +40$

Radices $\left.\begin{matrix} 10 - D^2 \\ 2 D - 2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = 6 \\ = 2 \end{matrix}$

Parilis eſt ratio & in Fractis ubi per Numeratorem ſolum res peragitur.

CAPUT VII.

De Limitibus Quadrato-cubicarum.

EX Radicibus infra Unitatem dico quod R biq. $\frac{1}{5}$ dempto suo Quadratocubo maximam præbet differentiam nempe R biq. $\frac{256}{3125}$.

Quoad differentiam inter Biquadrata & eorundem Quadrato-cubos dico quod $\frac{4}{5}$ si prius biquadretur & deinceps ab isto Biquadratò detrahatur ipsius Quadrato-cubus relinquet maximam differentiam nempe $\frac{255}{3125}$.

Utraque Assertio probatur simili methodo quâ usi sumus in Limitibus cubicarum. Et Theorema exinde resultans est quod Biquadratum differentiæ inter radicem suumque Quadrato-cubum æqualis est differentiæ inter Biquadratum, complementi ad Biquadratum radicis, suumque Quadrato-cubum. Differentia inter Radicem & Quadratocubum Rbiq. x — Rbiq. x^5. biquadrando fit $x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5$

Complementum ad Biquadratum radicis $1 - x$

Ejusdem { Biquadr. $1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$
Quadr.cub. $1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$ }

Differentia $x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5$

Ponatur $\frac{4}{5} + x$

Biquadratum $\frac{255}{625} + \frac{256}{125}x + \frac{96}{25}x^2 + \frac{15}{5}x^3 + x^4$

Quadratocubus $\frac{1024}{3125} + \frac{255}{125}x + \frac{540}{125}x^2 + \frac{160}{25}x^3 + 4x^4 + x^5$

Differentia $\frac{265}{3125} - \frac{160}{125}x^2 - \frac{80}{25}x^3 - 3x^4 - x^5$

Ponatur iterum $\frac{4}{5} - x$ quæ dabit eadem differentiam inter Biquadratum suum Quadratocubum mutatis mutandis; nempe

Differentia $\frac{256}{3125} - \frac{160}{125}x^2 + \frac{80}{25}x^3 - 3x^4 + x^5$

Utraque differentia est minor quam $\frac{256}{3125}$ *viz.* prior apparet

minor

minor ex αὐτοψία; posterior sic probatur. Dico quod $\frac{82}{25} x^3 + x^5$ sunt minores quam $\frac{150}{125} x^2 + 3 x^4$.

Sint enim æquales $\frac{82}{25} x^3 + x^5 = \frac{160}{125} x^2 + 3 x^4$

Erunt $\frac{82}{25} x + x^3 = \frac{160}{125} + 3 x^2$

Scribatur $Z - 1$ pro x & tollatur terminus secundus nempe $3 x^2$ & proveniet Æquatio $Z^3 + \frac{61}{5} Z - \frac{68}{5}$ quæ Æquatio cadit sub *Cardani* Regulis quod est absurdum quoniam Radix proposita erat minor quam $\frac{4}{5}$ jam vero debebit major esse quam R $\frac{4}{3}$.

Si petatur differentia inter biquadratum & Quadratocubum à radice in ordine quadratico cuivis diligentius attendenti invenietur.

$\frac{1}{2} D + \frac{3}{2} D^2 + R\ (\frac{1}{4} D^2 + D^3) + R\ (\frac{1}{4} D^4 + D^5)$

Ponatur æqualis numero cuilibetcunque nempe 16

Erit $16 - \frac{1}{2} D - \frac{3}{2} D^2 = R\ (\frac{1}{4} D^2 + D^3) + R\ (\frac{1}{4} D^4 + D^5)$

Ergo $256 - 16 D - 48 D^2 - D^5 = 0$

Dividatur iterum per differentiam propositam nempe 16

Erit $D + 3 D^2 + \frac{1}{15} D^5 = \frac{1}{2} D + \frac{3}{2} D^2 + R(\frac{1}{4} D^2 + D^3) + R(\frac{1}{4} D^4 + D^5)$

Ergo $1 + 3 D + \frac{1}{16} D^4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} D + R\ (\frac{1}{4} + D) + R\ (\frac{1}{4} D^2 + D^3)$

Qui est ipsissimus cubus radicis primo propositæ ut videre licet in schemate de limitibus biquadraticarum.

Unde colligitur Theorema scilicet differentiam quadraticam (si biquadretur & dividatur per differentiam inter biquadratum radicis propositæ suumque quadrato-cubum, & deinceps augeatur tribus differentiis quadraticis superadditâ unitate) æquari cubo radicis propositæ. In radicibus infra unitatem mutantur signa; id est, pro $1 + 3 D + \frac{1}{15} D^4$ scribendum esset $1 - 3 D - q D^4$.

Atque hoc modo in aliis aliisque potestatibus indefinitè licebit ascendere.

FINIS.